



Mihai Monea
Steluța Monea
Ioan Șerdean
Adrian Zanoschi

Bacalaureat 2025

MATEMATICĂ

M_științele naturii

M_tehnologic

_Teme recapitulative
_40 de teste, după modelul M.E.
(10 teste fără soluții)

Editura Paralela 45



Cuprins

<i>Cuvânt-înainte</i>	4
-----------------------------	---

TEME RECAPITULATIVE

Clasa a IX-a

	Enunțuri	Soluții
1. Mulțimi și elemente de logică matematică	5	239
2. Șiruri. Progresii	10	240
3. Funcții	15	241
4. Funcția de gradul I	21	242
5. Funcția și ecuația de gradul al II-lea	26	242
6. Vectori în plan	32	243
7. Elemente de trigonometrie și aplicații în geometrie	37	244

Clasa a X-a

1. Numere reale.....	43	246
2. Funcții și ecuații.....	47	247
3. Probleme de numărare și combinatorică.....	54	248
4. Matematici aplicate. Probabilități	58	248
5. Geometrie analitică	63	249
6. Numere complexe*	68	250
7. Probleme de sinteză din materia claselor IX-X	73	250

Clasa a XI-a

1. Matrice	80	252
2. Determinanți	88	253
3. Aplicații ale determinanților în geometrie	93	253
4. Inversa unei matrice. Ecuații matriceale	97	254
5. Sisteme de ecuații liniare	103	255
6. Probleme de sinteză – algebră.....	110	256
7. Limite de funcții. Asimptote.....	115	260
8. Funcții continue	122	261
9. Derivata unei funcții	127	262
10. Rolul derivatelor de ordinul I și de ordinul al II-lea în studiul funcțiilor.....	134	263
11. Probleme de sinteză – analiză matematică.....	139	264

Clasa a XII-a

1. Legi de compoziție.....	144.....	268
2. Structuri algebrice. Morfisme	149.....	268
3. Polinoame	154.....	269
4. Probleme de sinteză – algebră.....	160.....	269
5. Primitive.....	165.....	272
6. Integrala definită	171.....	272
7. Aplicații ale integralei definite.....	176.....	273
8. Probleme de sinteză – analiză matematică.....	181.....	274

TESTE PENTRU BACALAUREAT, DUPĂ MODELUL M.E.**1. MODELE DE TESTE REZOLVATE**

PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT	188.....	279
--------------------------------------	----------	-----

2. MODELE DE TESTE PROPUSE

PENTRU EXAMENUL DE BACALAUREAT	226
--------------------------------------	-----

<i>Bibliografie</i>	302
---------------------------	-----

*Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.N. nr. 3022/08.01.2018.
Lucrarea este elaborată conform programei școlare în vigoare pentru bacalaureat.*

Redactare: Roxana Pietreanu
Tehnoredactare: Mioara Benza, Carmen Rădulescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

Bacalaureat 2025 : Matematică – M_șt-nat, M_tehnologic : teme recapitulative, 40 de teste, după modelul M.E. (10 teste fără soluții) /

Mihai Monea, Steluța Monea, Ioan Șerdean, Adrian Zanoschi. –

Pitești : Paralela 45, 2024

ISBN 978-973-47-4145-8

I. Monea, Mihai

II. Monea, Steluța

III. Șerdean, Ioan

IV. Zanoschi, Adrian

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45

Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești, jud.

Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro

sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia Editurii Paralela 45

E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2024

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparelela45.ro

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1.1. NOȚIUNI TEORETICE

1.1.1. Tipuri speciale de raționament

Metoda reducerii la absurd: Pentru a demonstra o implicație de tipul: *Dacă p (ipoteza) atunci q (concluzia)*, putem presupune concluzia p ca fiind falsă și apoi împreună cu ipoteza p construim un raționament care conduce la contradicție.

Metoda inducției matematice: Se aplică pentru propoziții de forma: *Demonstrați că, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, are loc $p(n)$* , unde $p(n)$ reprezintă un enunț care depinde de variabila n . Se verifică valoarea de adevăr a propoziției obținute în cazul $n = n_0$, se presupune ca fiind adevărată propoziția obținută în cazul $n = k$ și se demonstrează valoarea de adevăr a propoziției obținute pentru $n = k + 1$.

1.1.2. Mulțimi și cardinale

Teoremă: Orice mulțime A cu n elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, admite 2^n submulțimi.

Definiție: Pentru o mulțime finită A , numim **cardinalul** său și notăm $\text{Card}(A)$ ca fiind numărul său de elemente.

Proprietăți: Sunt adevărate următoarele proprietăți:

P1. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$;

P2. $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \cdot \text{Card}(B)$.

1.1.3. Mulțimea numerelor reale $\mathbb{R}$

Definiție: Numim **modulul** unui număr real x și notăm $|x|$ ca fiind distanța de la originea axelor la poziția numărului pe axă.

Proprietățile modulului:

- P1.** $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R};$ **P2.** $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$ **P3.** $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y;$
P4. $|x| < c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-c; c);$ **P5.** $|x| > c, c > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -c) \cup (c; \infty);$
P6. $|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases};$ **P7.** $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \forall x, y \in \mathbb{R};$
P8. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \forall x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^*;$ **P9.** $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|, \forall x, y \in \mathbb{R}.$

Definiție: Numim **parte întreagă** a numărului real x și notăm $[x]$ ca fiind cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu x .

Proprietățile părții întregi: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietățile:

- P1.** $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z};$ **P2.** $[x] = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \in [k, k+1).$

Definiție: Numim **parte fracționară** a numărului real x și notăm $\{x\}$ ca fiind diferența dintre număr și partea sa întreagă.

Proprietățile părții fracționare: Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc proprietățile:

- P1.** $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z};$ **P2.** $\{x\} \in [0, 1).$

1.2. PROBLEME DE ÎNȚIERE

- I1.** Determinați numărul de submulțimi ale mulțimii $A = \{a, b, c\}$.
I2. Determinați numărul de submulțimi nevide ale mulțimii $A = \{a, b, c, d\}$.
I3. Reuniunea a două mulțimi, cu câte 20 de elemente fiecare, are 31 de elemente. Determinați numărul de elemente comune ale celor două mulțimi.
I4. Demonstrați că $(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2 \in \mathbb{N}$.
I5. Arătați că numărul $a = (-5) \cdot [0, (4) + 0, 1(5)]$ este întreg.
I6. Determinați $a, b \in \mathbb{R}$ dacă avem egalitatea de intervale $[a - b; a + b] = [1; 7]$.
I7. Fie $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați cardinalul mulțimii:
 $B = \{x = (a - 1)(a - 2)(a - 3) + 4 \mid a \in A\}$.
I8. Determinați intersecția mulțimilor $A = (1, 5)$ și $B = [3, 11]$.
I9. Determinați partea întreagă a numărului $b = 2,13 + 1,88$.
I10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $|x - 2| = 5$.

1.3. PROBLEME DE CONSOLIDARE

- C1.** Fie mulțimea $A = \{a, b, c, d\}$. Determinați numărul de submulțimi ale lui A care îl conțin pe d .

3.4. TESTE DE VERIFICARE**Testul 1**

1. Fie funcția $f: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 4x$. Calculați diferența între cea mai mare și cea mai mică valoare a funcției f .
2. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 7$ și $g(x) = 5$.
3. Determinați valoarea numărului real a pentru care punctul de coordonate $(1, 5)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2ax^3 - 9$.
4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 1$. Calculați produsul:
$$P = f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(2014).$$
5. Demonstrați că punctul $A(2, 4)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^4 - 4ax^2 + x + 2$ oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
6. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ și funcția $f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - x^2$. Determinați elementele mulțimii $M = \{x \in A \mid f(x) < 18\}$.

Testul 2*

1. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2013} + 3x^5 - 4x$ este impară.
2. Funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verifică relația $f(x + 3) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Dacă $f(2) = 11$, calculați $f(14)$.
3. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1 - x\sqrt{3}$ este strict descrescătoare.
4. Fie funcțiile $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = 2x + 3, g(x) = 3x - 5$ și $h(x) = (f \circ g)(x) - (g \circ f)(x)$. Demonstrați că funcția g este constantă.
5. Demonstrați că graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = [2x + 1] + \frac{1}{2}$ nu intersectează axa Ox .
6. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |2x - 8|$ cu axele de coordonate.

Testul 3

1. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 1$. Coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy sunt:
A. $(-1; 0)$; B. $(1; 0)$; C. $(0; 1)$; D. $(0; -1)$.

6. Vectori în plan

6.1. NOȚIUNI TEORETICE

6.1.1. Generalități

Vectorul $\overrightarrow{AB}$ este caracterizat de

- direcția dreptei AB
- sensul de la A la B
- modulul egal cu lungimea segmentului $[AB]$

Doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ au aceeași direcție dacă dreptele suport sunt paralele sau suprapuse. Spunem că vectorii sunt **coliniari** și notăm $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Doi vectori $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt **egali** dacă au aceeași direcție, același sens și același modul. Notăm $\vec{u} = \vec{v}$.

6.1.2. Adunarea vectorilor

Regula paralelogramului: Dacă $ABCD$ este paralelogram, atunci $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Regula triunghiului: Pentru orice puncte A, B, C , avem $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Proprietăți: Adunarea vectorilor este asociativă, comutativă, are element neutru vectorul nul $\vec{0}$ și simetrizabilă. Simetricul vectorului $\vec{u}$ se notează $-\vec{u}$ și se numește **vectorul opus**. În particular, $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Scăderea vectorilor: Avem $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

6.1.3. Înmulțirea vectorilor cu scalar

Definiție: Fiind dat numărul real α și vectorul $\vec{u}$, vectorul $\alpha\vec{u}$ are aceeași direcție cu $\vec{u}$, același sens dacă $\alpha > 0$, respectiv sens opus dacă $\alpha < 0$ și modulul egal cu $|\alpha||\vec{u}|$.

Proprietăți: Înmulțirea vectorilor cu scalar este distributivă în raport cu adunarea vectorilor.

Teoremă: Vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari dacă și numai dacă există $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.

6.1.4. Relații vectoriale fundamentale

V1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ este paralelogram.

V2. Punctul M este mijlocul segmentului $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{PM} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}}{2}$, pentru orice punct P din planul triunghiului.

V3. Punctul $N \in [AB]$ pentru care $\frac{NA}{NB} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{PN} = \frac{\overrightarrow{PA} + k\overrightarrow{PB}}{1+k}$, pentru orice punct P din planul triunghiului.

V4. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{PG} = \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3}$, pentru orice P din planul triunghiului.

6.2. PROBLEME DE ÎNȚIERE

- I1.** Fie M mijlocul segmentului AB . Determinați valoarea numărului real x , pentru care $\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.
- I2.** Fie $ABCD$ un dreptunghi. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
- I3.** Fie $ABCD$ un pătrat de latură 2. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- I4.** Într-un plan se consideră punctele A, B, C și D . Demonstrați că:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}.$$
- I5.** Fie $ABCD$ un paralelogram. Demonstrați că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.
- I6.** Fie O intersecția diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Demonstrați că:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$
- I7.** Fie $ABCD$ un paralelogram și $x, y \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{CD} = \vec{0}$. Demonstrați că $x = y$.
- I8.** Fie $ABCD$ un dreptunghi în care $AB = 6$ și $AD = 8$. Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
- I9.** Fie $ABCD$ un paralelogram. Determinați $x \in \mathbb{R}$, dacă $\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.
- I10.** Fie dreptunghiul $ABCD$ și $M, N \in (AB)$, astfel încât $AM = MN = NB$. Determinați $x \in \mathbb{R}$, pentru care $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{CD}$.

6.3. PROBLEME DE CONSOLIDARE

- C1.** Într-un plan se consideră punctele M, N și P . Determinați modulul vectorului $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM}$.
- C2.** Fie M, N, P mijloacele laturilor AB, BC și, respectiv, CA ale triunghiului ABC . Demonstrați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.
- C3.** Fie M, N, P mijloacele laturilor AB, BC și, respectiv, CA ale triunghiului ABC . Demonstrați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$.
- C4.** Fie M mijlocul laturii BC a triunghiului ABC . Determinați valoarea numărului x pentru care $\overrightarrow{GA} + x\overrightarrow{GM} = \vec{0}$, unde G este centrul de greutate al triunghiului.

Clasa a X-a

1. Numere reale

1.1. NOȚIUNI TEORETICE

1.1.1. Radicali

Definiție: Numim **radical** de ordin $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, din numărul pozitiv a și notăm $\sqrt[n]{a}$ ca fiind acel număr pozitiv x unic cu proprietatea $x^n = a$.

Observație: Dacă $x \in \mathbb{N}$, atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dacă $\sqrt[n]{x} \notin \mathbb{N}$, atunci $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Proprietățile radicalului: Următoarele relații sunt adevărate pentru orice $a, b \geq 0$ și $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geq 2$.

P1. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;

P2. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $b \neq 0$;

P3. $\sqrt[mn]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^p}$;

P4. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

Observație: Dacă n este impar, putem calcula $\sqrt[n]{x}$ și dacă $x < 0$. În aceste condiții $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.

Observație: Avem $(\sqrt[n]{x})^n = x$, dar $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x, & n \text{ este impar} \\ |x|, & n \text{ este par} \end{cases}$.

1.1.2. Puteri cu exponent real

Observație: Noțiunea de ridicare la putere se poate generaliza astfel:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}, x \neq 0, n \in \mathbb{N}^*; x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}, x \geq 0, n \in \mathbb{N}^*; x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}, x \geq 0, m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Proprietățile ridicării la putere: Pentru orice $x, y > 0$ și orice $p, r \in \mathbb{R}$, au loc relațiile:

P1. $x^p x^q = x^{p+q}$;

P2. $\frac{x^p}{x^q} = x^{p-q}$;

$$\mathbf{P3.} \left(x^p\right)^q = x^{pq};$$

$$\mathbf{P4.} (xy)^p = x^p y^p.$$

1.1.3. Logaritmi

Definiție. Fie $a, b > 0, a \neq 1$. Soluția (unică) a ecuației $a^x = b$ se numește **logaritm în baza a din b** și se notează cu $\log_a b$.

Proprietățile logaritmului: Logaritmul are următoarele proprietăți valabile pentru orice $a, b, x, y > 0, a, b \neq 1$:

$$\mathbf{P1.} \log_a xy = \log_a x + \log_a y;$$

$$\mathbf{P2.} \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$\mathbf{P3.} \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\mathbf{P4.} \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Observație: Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ sunt numere prime diferite, atunci $\log_a b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1.2. PROBLEME DE ÎNȚIERE

$$\mathbf{I1.} \text{ Calculați } (-1)^5 + (-2)^4 + (-3)^3 + (-4)^2 + (-5).$$

$$\mathbf{I2.} \text{ Calculați } (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{100}.$$

$$\mathbf{I3.} \text{ Calculați } 8^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}.$$

$$\mathbf{I4.} \text{ Calculați } \sqrt[3]{125} + \sqrt{16} + \sqrt[3]{-27}.$$

$$\mathbf{I5.} \text{ Calculați } \log_{11} 11 + \log_7 \frac{1}{7}.$$

$$\mathbf{I6.} \text{ Calculați } \log_3 81 + \log_5 25 - \lg 100000.$$

$$\mathbf{I7.} \text{ Ordonați crescător numerele } a = -\sqrt[3]{27}, b = \log_2 \frac{1}{16}, c = -2.$$

$$\mathbf{I8.} \text{ Demonstrați că } \log_4 64 + \sqrt[3]{1000} = \sqrt{16} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}.$$

$$\mathbf{I9.} \text{ Demonstrați că } \log_{11} 121 < \sqrt[3]{27}.$$

$$\mathbf{I10.} \text{ Dacă } \log_2 3 = a, \text{ demonstrați că } \log_2 6 = 1 + a.$$

1.3. PROBLEME DE CONSOLIDARE

$$\mathbf{C1.} \text{ Calculați } \sqrt{18} - \sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{72}.$$

$$\mathbf{C2.} \text{ Arătați că } 2\sqrt{14} - \sqrt{\frac{7}{2}} - 5\sqrt{\frac{8}{7}} = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

7. Probleme de sinteză din materia claselor IX–X

Varianta 1

1. Demonstrați că numărul $A = \log_5(9 - \sqrt{6}) + \log_5(9 + \sqrt{6}) - \log_5 3$ este natural.
2. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2 - mx + 2 = 0$. Determinați $m \in \mathbb{R}$, știind că $x = 9$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1} + 5^{x+2} = 150$.
4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi care are 45 de submulțimi cu două elemente.
5. În sistemul de coordonate xOy considerăm punctele $A(1, 3)$ și $B(5, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați a , știind că lungimea segmentului AB este 5.
6. Determinați lungimea laturii BC a triunghiului ABC , știind că $m(\angle A) = 30^\circ$ și raza cercului circumscris $R = 10$ cm.

Varianta 2

1. Determinați numărul real x , știind că numerele $2x + 1$, $3x - 5$ și $2x - 5$ sunt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x - 5$. Demonstrați că:

$$\frac{f(\sqrt{7}) - f(\sqrt{5})}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} \in \mathbb{N}.$$

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + x + 2} = 3x - 1$.
4. După două scumpiri succesive de preț, una cu 10% și una cu 15%, un produs costă 253 de lei. Determinați prețul inițial al produsului.
5. Scrieți ecuația dreptei ce trece prin punctul $A(1, 3)$ și este paralelă cu dreapta de ecuație $x + y - 2 = 0$.
6. Determinați raza cercului circumscris unui triunghi dreptunghic cu catetele 6 cm, respectiv 8 cm.

Varianta 3

1. Demonstrați că $\frac{1 + \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} + \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \in \mathbb{Z}$.
2. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$. Calculați $(f \circ f \circ f)(1)$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x + 1) + \lg(4x + 1) = 1$.
4. Considerăm mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Determinați numărul tuturor numerelor pare de două cifre diferite care se pot forma cu elementele mulțimii A .
5. În sistemul de coordonate xOy , considerăm punctele $A(2, 1)$, $B(8, 3)$ și $C(0, 3)$. Determinați coordonatele punctului D , știind că $ABDC$ este paralelogram.

Clasa a XI-a

1. Matrice

1.1. NOȚIUNI TEORETICE

1.1.1. Generalități

Forma generală: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, unde $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ se numesc **coeficienți**.

Notăm cu $\mathcal{M}_{m \times n}(K)$ mulțimea matricelor cu m linii și n coloane și coeficienți în mulțimea K .

Dacă $m = n$, matricele se numesc **pătrate** și avem $\mathcal{M}_{n \times n}(K) \stackrel{\text{not}}{=} \mathcal{M}_n(K)$.

Cazuri particulare: $O_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ – **matricea nulă**, $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ –

matricea unitate.

Fiind dată matricea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times n}(K)$, **transpusa** sa este matricea

$${}^t A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times m}(K).$$

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m \times p}(K), \text{ unde } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \text{ pentru orice } i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ și } j \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Proprietățile înmulțirii matricelor: Operația de înmulțire a matricelor:

- este asociativă;
- în general **nu** este comutativă;
- operația de înmulțire a matricelor pătratice admite element neutru matricea unitate I_n ;
- este distributivă în raport cu adunarea matricelor.

Puterile unei matrice pătratice:

Fiind dată o matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, atunci $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$.

Propoziție: Sunt adevărate relațiile $A^k A^l = A^l A^k = A^{k+l}$ și $(A^k)^l = A^{kl}$ pentru orice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ și $k, l \in \mathbb{N}^*$.

1.1.3. Urma unei matrice pătratice

$$\text{Dacă } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(K), \text{ atunci } \textbf{urma} \text{ sa este } Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Proprietăți: Pentru orice $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ și $\alpha \in K$, avem:

T1. $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$; **T2.** $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A)$; **T3.** $Tr(AB) = Tr(BA)$.

1.2. PROBLEME DE ÎNȚIERE

I1. Determinați valorile numerelor reale a, b , pentru care matricele:

$$A = \begin{pmatrix} 2a+3 & 4 \\ 3b-5 & 7 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 16 & 7 \end{pmatrix} \text{ sunt egale.}$$

I2. Calculați suma matricelor $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

I3. Fiind dată matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -5 & 2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, determinați matricea $-3A$.

- I4.** Determinați produsul matricelor $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
- I5.** Considerăm matricea $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați B^2 .
- I6.** Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $A^2 - 7A = 2I_2$.
- I7.** Pentru matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ demonstrați că $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$.
- I8.** Fie $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determinați $x \in \mathbb{R}$, pentru care $A^2 = xA$.
- I9.** Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $AB = BA$.
- I10.** Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Determinați cel mai mic număr natural n , pentru care $A^n = O_2$.

1.3. PROBLEME DE CONSOLIDARE

- C1.** Demonstrați că, oricare ar fi numărul real a , matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 2a+5 \\ 3 & 3a+2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ nu pot fi egale.
- C2.** Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & 12 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$. Demonstrați că:
 $(2x+2)A - (3x+3)B = O_2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
- C3.** Fie matricea $A_k = \begin{pmatrix} 2^k & 2k \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, unde $k \in \mathbb{N}$. Determinați suma elementelor matricei $B = A_1 + A_2 + \dots + A_5$.
- C4.** Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Demonstrați că $AB = O_2$.

Clasa a XII-a

1. Legi de compoziție

1.1. NOȚIUNI TEORETICE

1.1.1. Legi de compoziție

Fie G o mulțime nevidă și o lege „ $*$ ”. Legea „ $*$ ”:

- este **lege de compoziție** pe G dacă $x * y \in G$ pentru orice $x, y \in G$ (se mai spune că mulțimea G este **parte stabilă** în raport cu legea „ $*$ ”);
- este **comutativă** dacă $x * y = y * x$ pentru orice $x, y \in G$;
- este **asociativă** dacă $x * (y * z) = (x * y) * z$ pentru orice $x, y, z \in G$;
- admite **element neutru** dacă există un element $u \in G$, astfel încât $x * u = u * x = x$ pentru orice $x \in G$;
- este **simetrizabilă** dacă pentru orice $x \in G$ există un element $x' \in G$, astfel încât $x * x' = x' * x = u$.

Observație: Elementul x' se numește **simetricul** lui x în raport cu legea de compoziție „ $*$ ”.

1.1.2. Mulțimea claselor de resturi

Fie mulțimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$ și $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Pentru orice $r \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, definim mulțimea $\hat{r} = \{z \in \mathbb{Z} \mid \text{restul împărțirii lui } z \text{ la } n \text{ este egal cu } r\}$.

Mulțimea $\mathbb{Z}_n = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$ se numește mulțimea **claselor de resturi modulo n** .

Definim operațiile:

- $\hat{x} + \hat{y} = \hat{z}$, unde z este restul împărțirii numărului $x + y$ la n ;
- $\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{t}$, unde t este restul împărțirii numărului xy la n .

Proprietăți:

- adunarea din $\mathbb{Z}_n$ este lege de compoziție asociativă și comutativă;
- adunarea admite element neutru elementul $\hat{0}$;
- orice element $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n$ este **simetrizabil**, simetricul său fiind elementul $\widehat{n-x}$, care se mai notează $-\hat{x}$;

- înmulțirea din $\mathbb{Z}_n$ este lege de compoziție comutativă, asociativă și distributivă în raport cu adunarea;
- înmulțirea admite element neutru elementul $\hat{1}$;
- evident, $\hat{0} \cdot \hat{x} = \hat{0}$ pentru orice $\hat{x} \in \mathbb{Z}_n$;
- dacă n este număr prim, atunci din $\hat{x}\hat{y} = \hat{0}$ obținem $\hat{x} = \hat{0}$ sau $\hat{y} = \hat{0}$; dacă n nu este prim, nu este adevărat întotdeauna (de exemplu, în $\mathbb{Z}_6$ avem $\hat{3} \cdot \hat{4} = \hat{0}$);
- un element $\hat{x}$ este **inversabil** dacă există $\hat{y}$ astfel încât $\hat{x}\hat{y} = \hat{1}$; atunci $\hat{y}$ este inversul lui $\hat{x}$ și se notează $\hat{x}^{-1}$;
- un element $\hat{x}$ este **inversabil** dacă și numai dacă numerele x și n admit divizor comun doar pe 1.

1.2. PROBLEME DE ÎNȚIERE

- Pe $\mathbb{R}$ definim legea „ $\circ$ ” prin $x \circ y = x + y - 3$. Calculați $4 \circ 9$.
- Pe $\mathbb{R}$ definim legea „ $\circ$ ” prin $x \circ y = x + y - 3$. Demonstrați că această lege este comutativă.
- Pe $\mathbb{R}$ definim legea „ $\circ$ ” prin $x \circ y = x + y - 3$. Demonstrați că această lege este asociativă.
- Pe $\mathbb{R}$ definim legea „ $\circ$ ” prin $x \circ y = x + y - 3$. Demonstrați că 3 este elementul neutru al acestei legi.
- Pe $\mathbb{R}$ definim legea „ $\circ$ ” prin $x \circ y = x + y - 3$. Știind că legea admite pe 3 ca element neutru, determinați simetricul elementului $x = 7$ în raport cu această lege.
- Pe $\mathbb{R}$ definim legea „ $\circ$ ” prin $x \circ y = x + y - 3$. Determinați valoarea numărului real x , pentru care $x \circ x \circ x = 21$.
- În $\mathbb{Z}_6$, calculați $\hat{2} + \hat{5}$.
- În $\mathbb{Z}_6$, calculați $\hat{2} \cdot \hat{5}$.
- Considerăm mulțimea $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $X, Y \in C$, avem $X + Y \in C$.
- Considerăm mulțimea $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Demonstrați că, oricare ar fi $X, Y \in C$, avem $X \cdot Y \in C$.

Teste pentru Bacalaureat, după modelul M.E.

1. Modele de teste rezolvate pentru examenul de Bacalaureat

Testul 1

Subiectul I **(30 de puncte)**

- (5p) 1. Demonstrați că numărul $a = \lg 30 + \lg 2 - \lg 6$ este natural.
- (5p) 2. Demonstrați că ecuația $(a^2 + 1)x^2 - 2x + 1 = 0$ nu admite rădăcini reale, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$.
- (5p) 3. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$.
Calculați $f\left(-\frac{1}{2}\right)f(-1)f(0)f(1)f\left(\frac{1}{2}\right)$.
- (5p) 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulțimea $\{C_4^3, C_5^2, C_4^2\}$, acesta să fie divizibil cu 3.
- (5p) 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 4)$, $B(6, 8)$ și $C(8, 2)$.
Calculați distanța de la C la mijlocul segmentului AB .
- (5p) 6. Calculați $(\cos 120^\circ + \cos 60^\circ)(\sin 135^\circ - \sin 45^\circ)$.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x + 2y - az = 3 \\ 2x - y - z = 1 \\ -x + 3y + z = 2 \end{cases}, \text{ unde } a \text{ este un parametru}$$

real. Notăm cu A matricea sistemului.

- (5p) a) Demonstrați că tripletul $(-1, 2, -5)$ este soluție a sistemului în cazul $a = 0$.
 (5p) b) Determinați determinantul matricei A .
 (5p) c) Dacă $a \neq 0$, demonstrați că soluțiile sistemului nu depind de a .

2. Se consideră mulțimea $H = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\} \subset \mathbb{Z}_8$.

- (5p) a) Demonstrați că mulțimea H este parte stabilă în raport cu adunarea din $\mathbb{Z}_8$.
 (5p) b) Determinați $x \in H$ cu proprietatea că $x^3 = \hat{0}$.
 (5p) c) Calculați $\hat{0}^{2012} + \hat{2}^{2012} + \hat{4}^{2012} + \hat{6}^{2012}$.

Subiectul al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$.

- (5p) a) Calculați $f'(x)$.
 (5p) b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
 (5p) c) Demonstrați că $\sqrt{e} \geq \frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

- (5p) a) Calculați $\int_1^4 \frac{f(x)}{\ln x} dx$.
 (5p) b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x)$.
 (5p) c) Demonstrați că $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx \leq 0$.

Testul 2

Subiectul I

(30 de puncte)

- (5p) 1. Calculați $C_6^3 - A_4^2 + 3$.
 (5p) 2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_3(x^2 - 16) = 2$.
 (5p) 3. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pentru care $a_1 = 2$ și $a_5 = 18$. Calculați a_{2012} .
 (5p) 4. După două scumpiri succesive cu 10% și apoi cu 20%, prețul final al unui produs este 1 320 de lei. Determinați prețul inițial.

- (5p) 5. În sistemul de coordonate carteziene xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(3, 2)$ și $C(m, 3)$. Determinați valoarea numărului real m , știind că punctele A, B și C sunt coliniare.
- (5p) 6. Demonstrați că $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ = 1$.

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (5p) a) Demonstrați că $A^2 - 6A - I_2 = O_2$.
- (5p) b) Demonstrați că matricea A este inversabilă și determinați inversa sa.
- (5p) c) Demonstrați că $A^{2012} - 6A^{2011} - A^{2010} - A^4 + 6A^3 + A^2 = O_2$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 3X - a \in \mathbb{R}[X]$. Notăm cu x_1, x_2 și x_3 rădăcinile sale.
- (5p) a) Determinați valoarea numărului real a , știind că $x_1 = 1$.
- (5p) b) Demonstrați că $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
- (5p) c) Determinați valoarea numărului real a , știind că polinomul f are toate rădăcinile reale.

Subiectul al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(x+1)$.

- (5p) a) Demonstrați că $f'(x) = -\frac{x}{(x+1)^2}$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.
- (5p) b) Demonstrați că funcția f este strict descrescătoare.
- (5p) c) Demonstrați că $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1)$, pentru orice $x \in [0, \infty)$.

2. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2}$.

- (5p) a) Calculați $\int \left(f(x) - \frac{x+1}{x^2} \right) dx$.
- (5p) b) Calculați $\int_1^2 f(x) dx$.
- (5p) c) Folosind, eventual, inegalitatea $x^2 + 1 \geq 2x$, pentru orice $x \in (0, \infty)$, demonstrați că $\int_1^e f(x) dx \geq 3$.

Testul 11

Subiectul I

(30 de puncte)

- (5p) 1. Determinați $x \in (0, \infty)$ pentru care numerele 2, $x + 3$, 8 sunt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.
- (5p) 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{2012} + x^2 + 1$. Demonstrați că:

$$f(-3) - f(-1) + f(1) - f(3) = 0.$$
- (5p) 3. Se consideră mulțimea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Câte submulțimi ale mulțimii A au cel puțin 5 elemente?
- (5p) 4. Ordonați crescător numerele $\frac{1}{|\sqrt{2} - \sqrt{3}|}$, $\log_2 \frac{1}{8}$ și 0,(13).
- (5p) 5. Într-un sistem de axe xOy , se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(2, 4)$ și $C(4, 2)$. Demonstrați că triunghiul ABC este isoscel.
- (5p) 6. Demonstrați că $\cos 10^\circ + \cos 30^\circ + \cos 50^\circ + \dots + \cos 170^\circ = 0$.

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- (5p) a) Demonstrați că $A^2 - I_2 = O_2$.
- (5p) b) Demonstrați că matricea A este inversabilă și determinați inversa sa.
- (5p) c) Dați exemplu de două matrice $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \setminus \{O_2\}$ pentru care $XY = O_2$.
2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_6$ definim operația „ $\oplus$ ” definită prin $x \oplus y = x + y + \hat{3}$, pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}_6$.
- (5p) a) Calculați $\hat{5} \oplus \hat{4}$.
- (5p) b) Demonstrați că legea „ $\oplus$ ” este asociativă.
- (5p) c) Determinați elementul neutru al legii „ $\oplus$ ”.

Subiectul al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1}$.
- (5p) a) Demonstrați că $f'(x) = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$.
- (5p) b) Demonstrați că graficul funcției f nu admite puncte de extrem.
- (5p) c) Determinați ecuația asimptotei oblice la $+\infty$, la graficul funcției f .
2. Se consideră funcția $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + e^{2-x}$.
- (5p) a) Determinați primitivele funcției f .

- (5p) b) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - e^{2-x}$.
- (5p) c) Folosind, eventual, inegalitatea $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $a, b > 0$, demonstrați că $\int_0^2 f(x)dx \geq 4e$.

Testul 12*

Subiectul I

(30 de puncte)

- (5p) 1. Determinați cel mai mare număr întreg x care verifică inegalitatea $x < 3\sqrt{2}$.
- (5p) 2. Demonstrați că rădăcinile ecuației $x^2 - mx - (m + 2) = 0$ sunt reale distincte, oricare ar fi valoarea parametrului real m .
- (5p) 3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $3^{4-2x} \leq 81$.
- (5p) 4. Demonstrați că $C_4^0 + C_4^2 + C_4^4 = 2^3$.
- (5p) 5. Fie M, N, P mijloacele laturilor BC, CA și, respectiv, AB ale triunghiului ABC . Arătați că $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.
- (5p) 6. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = 4, BC = 6$ și $AC = 8$. Determinați $\cos A$.

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. În sistemul de axe xOy , se consideră punctele $A(1, 1), B(9, 3)$ și $C(3, 7)$. Notăm cu M mijlocul laturii BC .
- (5p) a) Determinați ecuația dreptei AM .
- (5p) b) Demonstrați că triunghiurile AMB și AMC au arii egale.
- (5p) c) Demonstrați că, pentru orice punct $P \in AM$, triunghiurile ABP și ACP au aceeași arie.
2. Pe mulțimea $A = (0, \infty)$ definim legea „ $\circ$ ” definită prin $x \circ y = \sqrt{xy}$.
- (5p) a) Demonstrați că $16 \circ 81 \in \mathbb{N}$.
- (5p) b) Demonstrați că $1 \circ (16 \circ 81) < (1 \circ 16) \circ 81$.
- (5p) c) Demonstrați că legea „ $\circ$ ” nu este asociativă.

Subiectul al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} ax^2, & x < 1 \\ 2x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$.
- (5p) a) Determinați valoarea numărului real a , știind că funcția f este continuă în punctul $x = 1$.

Testul 23

Subiectul I (30 de puncte)

- (5p) 1. Determinați numărul real x pentru care numerele 2, $x + 2$ și 10 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- (5p) 2. Calculați $f(1) + f(2)$ pentru funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$.
- (5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_9(x^2 + 5) = 1$.
- (5p) 4. Determinați numărul submulțimilor cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 6 elemente.
- (5p) 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta h de ecuație $y = x - 1$ și punctul $A(2, 2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este paralelă cu h .
- (5p) 6. Se consideră expresia $E(x) = \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{2}$. Arătați că $E(90^\circ) = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru orice număr natural m , definim matricea $A(m) = \begin{pmatrix} m & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
- (5p) a) Calculați suma $A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(10)$.
- (5p) b) Demonstrați că $\det(A)$ este număr par, oricare ar fi $m \in \mathbb{N}$.
- (5p) c) Demonstrați că, oricare ar fi $p \in \mathbb{N}$, are loc relația $\det(A(p+1)) > \det(A(p))$.
2. Pe mulțimea $(0, \infty)$, definim operația „ $*$ ” prin relația $x * y = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.
- (5p) a) Demonstrați că $4 * 3 > 2$.
- (5p) b) Demonstrați că valoarea expresiei $x * x$ este aceeași, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$.
- (5p) c) Determinați $x \in \mathbb{Q}$ din egalitatea $(2 * 2) \cdot (4 * 4) \cdot (6 * 6) \cdot \dots \cdot (10 * 10) = 8^x$.

Subiectul al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^6 - 6x + 10$.
- (5p) a) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^6}$.
- (5p) b) Determinați coordonatele punctului de minim al graficului funcției f .
- (5p) c) Demonstrați că $f(0,9) + f(1,1) > 10$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

- (5p) a) Calculați $\int_1^2 f(x) dx$.
- (5p) b) Calculați $\int_0^1 (6x - 2)f^2(x) dx$.
- (5p) c) Calculați $\int_0^1 e^x f(x) dx$.

Testul 24*

Subiectul I

(30 de puncte)

- (5p) 1. Arătați că numărul $x = 2(1 + i) - 2i$ este real.
- (5p) 2. Calculați $(f \circ f)(1)$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x + 1$.
- (5p) 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + x + 1} = 1$.
- (5p) 4. Determinați $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, pentru care $C_n^1 + C_n^2 = 15$.
- (5p) 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0, 0)$ și $A(2, 3)$. Determinați coordonatele punctului B , știind că A este mijlocul segmentului (OB) .
- (5p) 6. Calculați $\operatorname{ctg} a$, știind că $\sin a = \frac{1}{3}$ și $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (5p) a) Demonstrați că $A^2 - 3A + 2I_2 = O_2$.
- (5p) b) Demonstrați prin inducție matematică egalitatea $A^n = (2^n - 1)A - (2^n - 2)I_2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.
- (5p) c) Determinați valoarea numărului real x din egalitatea $A^2 + A^3 + \dots + A^{100} = (2^x - 103)(A - I_2) + 99I_2$.
2. Fie polinomul $f_n = 2nX^{2n+1} - (2n+1)X^{2n} + 1$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.
- (5p) a) Determinați toate rădăcinile complexe ale polinomului f_1 .
- (5p) b) Demonstrați că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, polinomul f_n admite o rădăcină naturală dublă.
- (5p) c) Demonstrați că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, polinomul f_n admite exact trei rădăcini reale.

2. Modele de teste propuse pentru examenul de Bacalaureat

Testul 1

Subiectul I

(30 de puncte)

- (5p) 1. Determinați suma primilor trei termeni ai unei progresii geometrice, știind că suma primilor doi termeni ai progresiei este egală cu 8, iar diferența dintre al doilea termen și primul termen este egală cu 4.
- (5p) 2. Determinați punctele de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ cu axele de coordonate.
- (5p) 3. Demonstrați că ecuația $x^2 + mx - m^2 - 2 = 0$ admite soluții reale distincte, pentru orice $m \in \mathbb{R}$.
- (5p) 4. Demonstrați că $C_{18}^1 - A_4^2 = P_3$.
- (5p) 5. Calculați lungimea laturii AC a triunghiului ABC , știind că $m(\angle B) = 45^\circ$, $m(\angle C) = 30^\circ$ și $AB = 10$.
- (5p) 6. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5, -4)$ și $B(0, 8)$. Calculați lungimea segmentului AM , unde M este mijlocul segmentului AB .

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră numerele reale a, b și sistemul
$$\begin{cases} x + y + az = 4 \\ x + y + z = 3 \\ -3x - y + 2z = b \end{cases}.$$
- (5p) a) Demonstrați că sistemul nu are soluție în cazul $a = 1$.
- (5p) b) Rezolvați sistemul în cazul $a = 2, b = -2$.
- (5p) c) Determinați valoarea numărului real a pentru care soluția sistemului verifică condiția $x + y + 2z = 4$.
2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X], f = X^3 - 2X^2 + aX - 8$.
- (5p) a) Determinați numărul real a , astfel încât o rădăcină a polinomului f să fie egală cu 2.
- (5p) b) Pentru $a = 4$, calculați și restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - X + 2$.
- (5p) c) Demonstrați că f nu are toate rădăcinile reale, oricare ar fi $a \in (2, +\infty)$.

Subiectul al III-lea**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \ln x - 2$.

(5p) a) Determinați ecuația tangentei duse la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

(5p) b) Determinați coordonatele punctului extrem al graficului funcției f .

(5p) c) Determinați mulțimea numerelor $x \in (0, \infty)$ pentru care $f(x) > -1$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x(x-1), & x < 1 \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x \geq 1 \end{cases}$.

(5p) a) Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

(5p) b) Calculați $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

(5p) c) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f(x)$, pentru orice $x \in [1, e]$.

Testul 2**Subiectul I****(30 de puncte)**

(5p) 1. Calculați $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} - \sqrt[3]{\frac{8}{125}}$.

(5p) 2. Determinați numerele reale a și b pentru care punctul $A(a, b+1)$ aparține graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x+5$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x+1$.

(5p) 3. Rezolvați ecuația $4^{2-x} = 16$.

(5p) 4. Rezolvați ecuația $\log_5(x+2) - \log_5(2x-5) = 1$.

(5p) 5. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ și este paralelă cu dreapta $y = x + 2$.

(5p) 6. Demonstrați egalitatea $\sin 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ = \cos 30^\circ + \operatorname{ctg} 45^\circ$.

Subiectul al II-lea**(30 de puncte)**

1. În $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = I_3 + A$.

(5p) a) Calculați $A \cdot B$.

(5p) b) Calculați determinantul matricei $A^2 + A^3$.

Testul 8***Subiectul I****(30 de puncte)**

- (5p) 1. Demonstrați că $i^6 + \lg 1000 = 25^{\frac{1}{2}} + \sqrt[3]{-27}$.
- (5p) 2. Determinați toate numerele întregi a care verifică inegalitatea:

$$a^2 + a - 12 < 0.$$
- (5p) 3. Demonstrați că graficele funcțiilor $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$ și $g(x) = -3^x$ nu se intersectează.
- (5p) 4. Calculați suma $2^6 + C_6^1 2^5 + C_6^2 2^4 + C_6^3 2^3 + C_6^4 2^2 + C_6^5 2^1$.
- (5p) 5. Fie vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{w} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$. Demonstrați că:

$$|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + 2\vec{w} \cdot \vec{u} = 0.$$
- (5p) 6. Triunghiurile ABC și MNP au aceeași lungime a razei cercului circumscris, $BC = NP$, dar unghiurile $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle M$ de măsuri diferite. Calculați suma măsurilor unghiurilor $\sphericalangle A$ și $\sphericalangle M$.

Subiectul al II-lea**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.
- (5p) a) Calculați B^2 .
- (5p) b) Determinați numerele reale x, y cu proprietatea $A = xI_2 + yB$, unde

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
- (5p) c) Calculați A^{20} .
2. Considerăm polinoamele $f = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 5X + 1$ și $g = X^2 - X - 1$.
- (5p) a) Determinați restul împărțirii lui f la g .
- (5p) b) Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile lui g , calculați $x_1^2 + x_2^2$.
- (5p) c) Dacă x_1, x_2 sunt rădăcinile lui g , calculați $f(x_1) + f(x_2)$.

Subiectul al III-lea**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x}$.
- (5p) a) Calculați $f'(x)$.
- (5p) b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
- (5p) c) Folosind, eventual, monotonia funcției f , demonstrați că $\frac{\sqrt{e}}{9} < \frac{\sqrt[3]{e}}{4}$.

2. Se consideră funcția $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

(5p) a) Determinați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției în jurul axei Ox .

(5p) b) Calculați $\int_0^1 xf(x) dx$.

(5p) c) Calculați $\int_0^1 f(x) dx$.

Testul 9*

Subiectul I

(30 de puncte)

(5p) **1.** Demonstrați că numărul $(1 - 2i)(2 + 3i) + (2 - 3i)(1 + 2i)$ este întreg.

(5p) **2.** Demonstrați că $x^2 - 2(m + 1)x + m^2 + 2m + 2 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $m \in \mathbb{R}$.

(5p) **3.** Determinați mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $\log_x(6x - 5) = 2$.

(5p) **4.** Determinați $x \in \mathbb{N}, x \geq 3$, cu proprietatea $A_x^3 = 2 \cdot x$.

(5p) **5.** Fie triunghiul dreptunghic ABC cu ipotenuza BC . Demonstrați relația:

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{CA} \cdot \overline{CB} = BC^2.$$

(5p) **6.** Determinați toate numerele reale $x \in [0, 2\pi]$ care sunt soluții ale ecuației:

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. Pentru orice matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, notăm cu $Tr(A) = a + d$. De asemenea, fie mulțimea $\{U = X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X^2 = O_2\}$.

(5p) a) Demonstrați că, oricare ar fi $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avem $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$.

(5p) b) Demonstrați că, oricare ar fi $C \in U$, avem $Tr(C) = 0$.

(5p) c) Demonstrați că, oricare ar fi $X, Y \in U$, avem $X + Y \neq I_2$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea notată „ $\odot$ ”, definită prin $x \odot y = xy - 2x - 2y + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Calculați $1 \odot 2 \odot 3 \odot 4$.

Soluții

Clasa a IX-a

1. Mulțimi și elemente de logică matematică

I1.	I2.	I3.	I4.	I5.	I6.	I7.	I8.	I9.	I10.
8	16	9	$8 \in \mathbb{N}$	$a = -1$	$(4, 3)$	3	$[3, 5)$	4	-3 și 7

C1. $2^3 = 8$. **C2.** 31 nevide $\Rightarrow$ 32 în total $\Rightarrow A$ are 5 elemente. **C3.** $28 + 28 - 11 = 45$. **C4.** $2^2 = 4$.

C5. $2 + \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 5$. **C6.** $2x + 1$ divide pe 6, deci $2x + 1 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\} \Rightarrow A = \{-2, -1, 0, 1\}$.

C7. $4x - 2 < 2 < 2x + 6 \Rightarrow x \in (-2, 1)$. **C8.** $12 + 25 - 7 = 30 \Rightarrow 30$ de elevi. **C9.** $A \setminus B = [2, 5)$, deci numărul este 4. **C10.** $A \cup B = (-2, 5)$, deci sunt 6 numere întregi. **C11.** Se obține $a < c < b$.

C12. $x - 3 \mid 2 \Rightarrow x - 3 \in \{\pm 1, \pm 2\} \Rightarrow A = \{1, 2, 4, 5\}$. **C13.** $\frac{11}{9} = 1,2222\dots$, deci $P = 2^{10} = 1024$.

C14. $\frac{13}{6} = 2,1666\dots$, deci cifra 3 nu apare niciodată. **C15.** $\frac{23}{15} = 1,53333\dots$, deci $S = 5 + 3 \cdot 99 =$

$= 302$. **C16.** $A - B = (-3, 1] \Rightarrow$ cardinalul mulțimii $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$ este 4. **C17.** $a = 7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$, $b = 9\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$, deci $\sqrt{ab} = \sqrt{18 \cdot 2} = 6$. **C18.** Avem $x + 4 = 1 - 2x$ și $x + 4 = 2x - 1$, de unde $x \in \{-1, 5\}$. **C19.** $|2 - \sqrt{5}| + |3 - \sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2 + 3 - \sqrt{5} = 1 \in \mathbb{N}$. **C20.** $3x - 2 = \pm 11 \Rightarrow x \in \left\{\frac{13}{3}, -3\right\}$. Dar $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -3$. **C21.** Avem $\left[\frac{17}{5}\right] = 2$ și

$\left\{\frac{11}{6}\right\} = \frac{5}{6}$, deci suma este $\frac{17}{6}$. **C22.** Avem $4 < a < 5$, deci $[a] = 4$. **C23.** $b = 5 + \sqrt{26} \in (10, 11) \Rightarrow [b] = 10$. **C24.** $A = |\sqrt{2} - 3| + |\sqrt{2} - 1| = 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 = 2 \in \mathbb{N}$. **C25.** $a = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{2}}{1 - 2} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - 3} + \dots + \frac{\sqrt{99} - \sqrt{100}}{99 - 100} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{100}}{-1} = \frac{1 - 10}{-1} = 9 \in \mathbb{N}$. **C26.** Avem $\sqrt{3} + \sqrt{25} = 5 + \sqrt{3} \in (6, 7)$, deci $[\sqrt{3} + \sqrt{25}] = 6$. Apoi $\sqrt{4} + \sqrt{19} = 2 + \sqrt{19} \in (6, 7)$, așadar

$[\sqrt{4} + \sqrt{19}] = 6$. **C27.** Pentru pasul de inducție avem $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k + 1) = \frac{k(k + 1)}{2} +$

Clasa a XI-a

1. Matrice

I1.	I2.	I3.	I4.	I5.	I6.	I7.	I8.	I9.	I10.
$a=4$ $b=7$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 & 0 & 12 \\ -9 & 15 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 24 & 13 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	calcul	Ambele sunt egale cu 7.	5	calcul	2

C1. $A = B \Leftrightarrow 2a + 5 = 7, 3a + 2 = 8 \Rightarrow a = 1$ și $a = 2$, imposibil. **C2.** Se verifică prin calcul.

C3. $B = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$, unde, $m = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^5 = \frac{2^6 - 2}{2 - 1} = 62$, $n = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \dots + 2 \cdot 5 = 2(1 + 2 + \dots + 5) = 2 \cdot 15 = 30$, $p = \underbrace{(-1) + \dots + (-1)}_{5 \text{ ori}} = -5$. Atunci $B = \begin{pmatrix} 62 & 30 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ și suma

elementelor este 87. **C4.** Se verifică prin calcul. **C5.** Din $2X - AB = A \Rightarrow a = -8, b = 9, c = -3$

și $d = 1$. Atunci $a + b + c + d = -1$. **C6.** $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $A^3 = 6I_3$. **C7.** $A^2 = 6A \Rightarrow d = 6$.

C8. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A^3 = O_3 \Rightarrow A^k = O_3$, pentru orice $k \geq 3$, deci $A + A^2 + \dots + A^{20} = A + A^2 =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **C9.** $A^4 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, deci $S = 17$. **C10.** $A^{2014} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **C11.** Se demonstrează

că $A^2 = A$, atunci $A^k = A, \forall k \in \mathbb{N}^*$, deci $A^{2012} - A^{2011} = A - A = O_2$. **C12.** $3a = 12 \Rightarrow a = 4$.

C13. Se rezolvă sistemul astfel obținut și rezultă $a = -3, b = c = 2$ și $d = -1$. **C14.** Se verifică

prin calcul. **C15.** Se verifică prin calcul. **C16.** Se verifică prin calcul. **C17.** Din $a + b +$

$+ c + d = 10, a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, distincte $\Rightarrow \{a, b, c, d\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Atunci numărul

matricelor este $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. **C18.** Se rezolvă sistemul și se obține $X = \begin{pmatrix} 0 & -8 \\ -5 & -13 \end{pmatrix}$;

$Y = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. **C19.** Se verifică prin calcul. **C20.** $A^2 = -I_2 \Rightarrow A^{2014} = (A^2)^{1007} = (-I_2)^{1007} = -I_2$.

Test 3: 1. B; 2. D; 3. B; 4. D; 5. B; 6. D.

Teste pentru Bacalaureat, după modelul M.E.

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

1. Modele de teste rezolvate pentru examenul de Bacalaureat

Testul 1

I. 1. Avem $a = \lg 60 - \lg 6 = \lg 10 = 1$. **2.** $\Delta = -4a^2 < 0$, $(\forall) a \in \mathbb{R}^*$. **3.** Din $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ rezultă $f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f(-1)f(0)f(1); f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. **4.** Avem $A = \{C_4^3, C_5^2, C_4^2\} = \{4, 6, 10\}$. Notăm $p =$ probabilitatea ca un element din A să fie divizibil cu 3, obținem $p = \frac{1}{3}$. **5.** Notăm M mijlocul lui AB , punctul M va avea coordonatele $M(4, 6)$, de unde $d(C, M) = 4\sqrt{2}$. **6.** Cum $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ$, avem $(\cos 120^\circ + \cos 60^\circ)(\sin 135^\circ - \sin 45^\circ) = 0$. **II. 1.** a) Verificare; b) $\Delta = -5a$; c) Pentru $a \neq 0$, obținem $x = 1, y = 1, z = 0$ soluția sistemului. **2.** a) Din tabla operației rezultă că H e parte stabilă; b) $x \in \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}, \hat{6}\}$. c) Deoarece $x^3 = \hat{0}$, pentru orice $x \in H \Rightarrow$ suma este $\hat{0}$. **III. 1.** a) $f'(x) = e^x - 1$; b) Din a) $x = 0$ punct de minim pentru f . De aici, f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și strict crescătoare pe $(0, \infty)$; c) Deoarece $x = 0$ este punct de minim, alegând $x = \frac{1}{2}$, găsim $f\left(\frac{1}{2}\right) \geq 1$, adică $\sqrt{e} \geq \frac{3}{2}$. **2.** a) $\int_1^4 \frac{f(x)}{\ln x} dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_1^4 = 2$; b) $\gamma = \pi \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx = \pi \int_0^1 t^2 dt = \frac{\pi}{3}$; c) Deoarece $\ln x \leq 0$ pentru orice $x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$, rezultă $f(x) \leq 0$ și de aici concluzia.

Testul 2

I. 1. 11. **2.** $x \in \{-5, 5\}$. **3.** Se obține rația $r = 4$, $a_{2012} = 8046$. **4.** $x = 1000$. **5.** $m = 5$. **6.** Avem $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$, de unde $\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = 1$. **II. 1.** a) $A^2 = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}$, de unde $A^2 - 6A -$
 $-I_2 = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25 & 18 \\ 18 & 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2;$

b) $\det A = -1 \neq 0$; $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; c) $A^{2012} - 6A^{2011} - A^{2010} - A^4 + 6A^3 + A^2 = A^{2010}(A^2 - 6A - I) - A^2(A^2 - 6A - I) = A^{2010} \cdot O_2 - A^2 \cdot O_2 = O_2$, folosind a). **2.** a) $f(1) = 0$ conduce la $a = 1$; b) Folosind relațiile lui Viète, găsim că $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$; c) Din b), dacă $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, atunci $(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2 = (x_3 - 1)^2 = 0$, de unde $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, ceea ce conduce la $a = 1$. **III. 1.** a) $f'(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)' - (\ln(x+1))' = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = -\frac{x}{(x+1)^2}$; b) $f'(x) \leq 0$, $(\forall) x \in [0, \infty)$, de unde f descrescătoare; c) Din b) $\Rightarrow f(x) \leq f(0)$, $(\forall) x \in [0, \infty)$, adică $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1)$, $(\forall) x \in [0, \infty)$. **2.** a) $\int \left(f(x) - \frac{x+1}{x^2}\right) dx = \int dx = x + C$; b) $\int_1^2 f(x) dx = \frac{3}{2} + \ln 2$; c) Din $x^2 + 1 \geq 2x$ avem $x^2 + x + 1 \geq 3x$, de unde $\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \geq \frac{3}{x}$, $(\forall) x \in [1, e]$. Imediat $\int_1^e f(x) dx \geq 3 \int_1^e \frac{1}{x} dx = 3 \ln x \Big|_1^e = 3$.

Testul 3

I. 1. $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{2}{3}$. **2.** $-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{4}$, $m \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$. **3.** $x \in \{-3, 3\}$. **4.** $A_5^4 = 120$. **5.** **4.** **6.** $2\sqrt{7}$. **II. 1.** a) $\Delta = ab + bc + ac - a^2 - b^2 - c^2$, de unde $-2\Delta = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2$; b) Dacă A, B, C coliniare, $\Delta = 0$, adică $a = b = c$, ceea ce contrazice ipoteza a, b, c impare distincte; c) $\mathcal{A} = \frac{1}{2}|\Delta|$, iar Δ număr par, căci diferența a două numere impare este număr par. **2.** a) $a = x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2x + 2 = x(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x-2)$; b) $f(1) + f(2) = -1 + 1 = 0$; c) $f(x) = (x-1)(x-2)c(x) + ax + b$, de unde $f(1) = a + b$ și $f(2) = 2a + b$. Cum $f(1) = -1$ și $f(2) = 1$, găsim $a = 2$ și $b = -3 \Rightarrow r = 2x - 3$. **III. 1.** a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, de unde $y = 1$, asimptota la $+\infty$; b) $f'(x) = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$, $(\forall) x \in (-2, \infty)$, f strict crescătoare; c) Fie $g(x) = f(x) - 1$, $g: (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Obținem că $g(x) = -\frac{1}{x+2}$. În plus, $g(x) < 0$, $(\forall) x \in (-2, \infty)$, de unde $f(x) - 1 < 0$, $(\forall) x \in (-2, \infty)$, adică $f(x) < 1$, $(\forall) x \in (-2, \infty)$. **2.** a) $g'(x) = 3x^2e^{-x} - x^3e^{-x} = (3x^2 - x^3)e^{-x} = f(x)$; b) $\mathcal{A} = \int_0^3 |f(x)| dx = g(x) \Big|_0^3 = \frac{27}{e^3}$; c) $e^{-x} \leq 1$, $(\forall) x \in [0, \infty)$, conduce la $x^3e^{-x} \leq x^3$, de unde $\int_0^1 x^3e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^3 dx$, adică $\int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{4}$, căci $\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$.

punct de minim; c) $f(x) = (x+2)^2(x-4)$, de unde $f(x) \leq 0$, $(\forall) x \in (-\infty, +4)$. **2. a)** $\int_0^1 xe^x dx = 1$;

b) $\int_0^1 xe^{x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_1^e dt = \frac{e-1}{2}$; c) $I_{100} - I_{99} = \int_0^1 (xe^{x^{100}} - xe^{x^{99}}) dx = \int_0^1 xe^{x^{99}}(x-1) dx < 0$, $(\forall) x \in (0, 1)$, de unde concluzia.

Testul 11

I. 1. Din $x+3 = \frac{8+2}{2}$, obținem $x=2$. **2.** $f(-3) - f(-1) + f(1) - f(3) = 3^{2012} + 9 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 3^{2012} - 9 - 1 = 0$. **3.** $C_6^5 = 6$ reprezintă numărul submulțimilor cu 5 elemente.

În total, vom avea 7 submulțimi cu cel puțin 5 elemente. **4.** Avem $\frac{1}{|\sqrt{2}-\sqrt{3}|} = \sqrt{3} + \sqrt{2} > 1$,

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$. Obținem $\log_2 \frac{1}{8} < 0$, $(13) < \frac{1}{|\sqrt{2}-\sqrt{3}|}$. **5.** Avem $AB = \sqrt{10}$, $AC = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{8}$,

de unde concluzia. **6.** Cum $\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ$, $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$, $\cos 130^\circ = -\cos 50^\circ$, $\cos 110^\circ = -\cos 70^\circ$, $\cos 90^\circ = 0$, avem concluzia. **II. 1. a)** $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$, de unde $A^2 - I_2 = O_2$; b) Din $A^2 = I_2 \Rightarrow A$ este inversabilă și $A^{-1} = A$; c) Din $A^2 - I_2 = O_2 \Rightarrow (A - I_2)(A + I_2) = O_2$, deci putem alege $X = A - I_2$, $Y = A + I_2$. **2. a)** $\hat{0}$; b) $(x \oplus y) \oplus z = x + y + z$; c) $e = \hat{3}$.

III. 1. a) $f'(x) = \left(\frac{x^3 + 2x^2 + 2}{x^2 + 1} \right)' = \frac{(3x^2 + 4x)(x^2 + 1) - 2x(x^3 + 2x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$; b) $f'(x) = 0$

conduce la abscisa punctului critic $x = 0$. Cum derivata este crescătoare, f nu admite puncte extremale; c) Avem $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{x} = 1$, $n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = 2$, de unde ecuația asimptotei $y =$

$= x + 2$. **2. a)** $F(x) = \int f(x) dx = e^x - e^{2-x} + C$, $C \in \mathbb{R}$; b) $y(x) = e^x$. Volumul corpului va fi $\mathcal{V} = \pi \int_0^2 g^2(x) dx = \pi \int_0^2 e^{2x} dx = \frac{e^4 - 1}{2}$; c) În inegalitatea $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $a, b > 0$, luăm $a = e^x$, $b =$

$= e^{2-x}$. Imediat $e^x + e^{2-x} \geq 2e$, de unde $\int_0^2 f(x) dx \geq \int_0^2 2e = 4e$.

Testul 12*

I. 1. $3\sqrt{2} = \sqrt{18} > \sqrt{16} = 4 \Rightarrow x = 4$. **2.** $\Delta = m^2 + 4m + 8 = (m+2)^2 + 4 > 0$, $(\forall) m \in \mathbb{R}$.

3. $x \in [0, \infty)$. **4.** $C_4^0 + C_4^2 + C_4^4 = 1 + 6 + 1 = 2^3$. **5.** $\overline{BM} + \overline{CN} + \overline{AP} = \frac{\overline{BC}}{2} + \frac{\overline{CA}}{2} + \frac{\overline{AB}}{2} = \overline{O}$.

strict descrescătoare pe $(1, \infty)$. 2. a) $g'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x = f(x)$, deci g este o primitivă a lui f ; b) $\int_e^{e^2} f(x) dx = g(x) \Big|_e^{e^2}$. Dar $g(e^2) = 2e^2 - e^2 = e^2$, $g(e) = e - e = 0$, deci $\int_e^{e^2} f(x) dx = e^2$; c) $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$. Schimbarea de variabilă $\ln x = t$ conduce la $\int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

Testul 23

I. 1. $x+2 = \frac{2+10}{2}$; $x=4$. 2. $f(1)+f(2) = 2+5=7$. 3. $x^2+5=9 \Rightarrow x^2-4=0$; $x_1=-2$ și $x_2=2$, care verifică ecuația. 4. $C_6^2 = 15$. 5. $d \parallel h \Rightarrow m_d = m_h = 1$, $d: y-2=1 \cdot (x-2)$, deci $d: y=x$. 6. $E(90^\circ) = \sin 30^\circ + \cos 45^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

II. 1. a) $A(1)+A(2)+A(3)+\dots+A(10) \left(\begin{smallmatrix} 55 & 20 \\ 30 & 60 \end{smallmatrix} \right)$; b) $\det(A) = 6m-6 = 6(m-1)$, deci este număr par; c) Avem $A(p+1)-A(p) = 6 > 0$ și de aici concluzia. 2. a) Verificare; b) $x*x = 2$; c) Din punctul anterior avem $(2*2) \cdot (4*4) \cdot (6*6) \cdot \dots \cdot (10*10) = 2^5$, deci $2^{3x} = 2^5$, adică $x = \frac{5}{3}$.

III. 1. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 6x + 10}{x^6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{6}{x^5} + \frac{10}{x^6} \right) = 1$; b) Avem $f'(x) = 6x^5 - 6$. Ecuația $f'(x) = 0$ are soluția $x=1$. Deoarece $f'(x) < 0$ pentru $x < 1$ și $f'(x) > 0$ pentru $x > 1$, deducem că $x=1$ este punct minim. Cum $f(1) = 5$, punctul de minim are coordonate $(1; 5)$; c) Conform punctului anterior, deducem că $f(0,9) > 5$ și $f(1,1) > 5$. Adunăm cele două inegalități și obținem concluzia. 2. a) $\int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (3x^2 - 2x + 1) dx = x^3 \Big|_1^2 - x^2 \Big|_1^2 + x \Big|_1^2 = 8 - 1 - 4 + 1 + 2 - 1 = 5$; b) Schimbarea de variabilă $f(x) = t$ conduce la egalitatea $(6x-2)dx = dt$. Obținem $\int_2^9 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_2^9 = \frac{721}{3}$; c) $\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 e^x (3x^2 - 2x + 1) dx = e^x (3x^2 - 2x + 1) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x (6x - 2) dx = 2e - 1 - e^x (6x - 2) \Big|_0^1 + \int_0^1 6e^x dx = 2e - 1 - 4e - 2 + 6e - 6 = 4e - 9$.